

3. Vlastní kořeny a koeficienty kvadratické rovnice

$(x+3)(x+2) = x^2 + 2x + 3x + 2 \cdot 3 = x^2 + (2+3)x + 2 \cdot 3 = x^2 + 5x + 6$
 $(x+3)(x+2) = 0$
 $x+3=0 \quad x+2=0$
 $x_1 = -3 \quad x_2 = -2$
 $x^2 + px + q$
 $x^2 + 5x + 6 = 0 \quad p=5 \quad q=6$
 $x_1 + x_2 = -p = -5$
 $x_1 \cdot x_2 = q = 6$

- VIĚTOVY VZORCE (umožňují určit přímo kořeny kvadratické rovnice)
 pro kořeny x_1, x_2 kvadratické rovnice v normovaném tvaru ($a=1$)
 $x^2 + px + q = 0$ platí $x_1 + x_2 = -p$ $p, q \in \mathbb{R}$
 $x_1 \cdot x_2 = q$ $p^2 - 4q \geq 0$ ($D \geq 0$)

$x^2 + px + q = 0$
 $x^2 + 5x + 4 = 0$
 Viětový model
 $x_1 + x_2 = -5$
 $x_1 \cdot x_2 = 4$
 $x_1 = -1 \quad x_2 = -4$
 $\mathcal{K} = \{-1, -4\}$

MY JIŽ DŘÍVE - ROZKLAD NA SOUČIN

$x^2 + px + q = 0$
 $x^2 + 5x + 4 = 0$
 $(x+r)(x+d) = 0$
 $(x+1)(x+4) = 0$
 $x+1=0 \quad x+4=0$
 $x_1 = -1 \quad x_2 = -4$
 $\mathcal{K} = \{-1, -4\}$

- BUDE-LI MOŽNÉ, BUDEME NADÁLE VUŽÍVAT TENTO ZPŮSOB

- ROZKLAD KVADRATICKÉHO TROJČLENU NA KOŘENOVÉ Činitele

- Pokud x_1, x_2 kořeny kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$), pak pro $\forall x \in \mathbb{R}$ lze trojčlen kvadratický rozložit na součin (dvě kořenové činitele)

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- Naopak, lze-li kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$ rozložit na součin $a(x - x_1)(x - x_2)$, jsou čísla x_1, x_2 kořeny kv. rov. $ax^2 + bx + c = 0$.

$x_1 = -4 \quad 3x^2 + 15x + 12 = 0$ a naopak $3x^2 + 15x + 12 = 0$
 $x_2 = -1 \quad 3(x^2 + 5x + 4) = 0$
 $3(x - (-4))(x - (-1)) = 0$
 $3(x + 4)(x + 1) = 0$
 $x + 4 = 0 \quad x + 1 = 0$
 $x = -4 \quad x = -1$

POZNÁMKY

1. pro $x_1 = x_2$ (dvojnásobný kořen), $D = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_1) = a(x - x_1)^2$
 $3(x - 2)(x - 2) = 3(x - 2)^2$
2. pro $a = 1 \dots$ NORMOVANÁ ROVNICE
 $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$

Příklady

① určit kořeny rovnice pomocí Viětových modelů a rozložením na součin (kořenových činitelů)

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$
 Viě. model
 $x_1 + x_2 = 7$
 $x_1 \cdot x_2 = 12 \Rightarrow 3, 4$
 $x_1 = 3 \quad x_2 = 4 \quad \mathcal{K} = \{3, 4\}$
 $\Rightarrow$ kdyby
 na součin $(x - x_1)(x - x_2) = 0$

rozklad na součin
 $x^2 - 7x + 12 = 0$
 $\left[\begin{array}{l} x + b = -7 \\ x \cdot d = 12 \end{array} \Rightarrow -3, -4 \right]$ umíme-li
 najít
 $(x+3)(x+4) = 0$
 $x+3=0 \quad x+4=0$
 $x_1 = -3 \quad x_2 = -4 \quad \mathcal{K} = \{-3, -4\}$

$$b) x^2 + px + q = 0$$

$$2x) \begin{bmatrix} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{bmatrix}$$

$$x_1 = -4, x_2 = 2$$

$$M = \{-4, 2\}$$

$$\Rightarrow \text{součin } (x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$(x - (-4))(x - 2) = 0$$

$$(x + 4)(x - 2) = 0 \quad \text{SOUČIN}$$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{bmatrix}$$

$$(x + x_1)(x + x_2) = 0$$

$$(x + 4)(x - 2) = 0$$

$$\text{SOUČIN}$$

$$x + 4 = 0$$

$$x_1 = -4$$

$$x - 2 = 0$$

$$x_2 = 2$$

$$M = \{-4, 2\}$$

! TENTO ZPŮSOB BUDETE POUŽÍVAT ČASTĚJI !

2) Všechny rovnice, číslo $\in \mathbb{R}$

$$a) x^2 - 4x + 10 = 0$$

$$(x - 5)(x - 2) = 0$$

$$x - 5 = 0$$

$$x = 5$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

$$M = \{4, 5\}$$

$$b) x^2 - 9x + 8 = 0$$

$$2x) (x - 1)(x - 8) = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x - 8 = 0$$

$$x_2 = 8$$

$$M = \{1, 8\}$$

$$c) y^2 + 7y - 8 = 0$$

$$2x) (y + 8)(y - 1) = 0$$

$$y + 8 = 0$$

$$y_1 = -8$$

$$y - 1 = 0$$

$$y_2 = 1$$

$$M = \{-8, 1\}$$

$$d) x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$(x - 4)(x - 3) = 0$$

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = 3$$

$$M = \{3, 4\}$$

$$e) x^2 + 3x + 5 = 0$$

$$! \begin{bmatrix} \text{součet } 3 & 1,5 & \text{nada' součin } 3 \\ \text{součin } 5 & -4,5 & \Rightarrow \text{VZOREC} \end{bmatrix}$$

$$(a=1, b=3, c=5)$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-11}}{2}, D = -11 < 0$$

$$\text{nemá v } \mathbb{R} \text{ řeš. } M = \emptyset$$

$$f) x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} \text{součet } 2 & 1,2 & \text{nada' součin } -6 \\ \text{součin } -6 & -4,2 & \Rightarrow \text{VZOREC} \end{bmatrix}$$

$$(a=1, b=-6, c=2)$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{+6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{28}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4 \cdot 7}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{VYTKNOUT } 2 \Rightarrow \text{KRÁTKÉ (MUTNÝ SOUČIN)}$$

$$x_1 = \frac{6 + 2\sqrt{7}}{2} = \frac{2(3 + \sqrt{7})}{2} = 3 + \sqrt{7}$$

$$\text{VYTKNOUT } 2 \Rightarrow \text{KRÁTKÉ}$$

$$x_2 = \frac{6 - 2\sqrt{7}}{2} = \frac{2(3 - \sqrt{7})}{2} = 3 - \sqrt{7}$$

$$M = \{3 - \sqrt{7}, 3 + \sqrt{7}\}$$

3) Rozložte Arade. trojčlen na součin

$$a) 2x^2 - 5x - 3 = 2(x - 3)(x - (-\frac{1}{2})) = 2(x - 3)(x + \frac{1}{2}) = (x - 2) \cdot 2(x + \frac{1}{2}) =$$

$$\begin{bmatrix} 2x^2 - 5x - 3 = 0 \\ (a=2, b=-5, c=-3) \\ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} \\ x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4} = \begin{cases} \frac{5+7}{4} = 3 \\ \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{bmatrix}$$

$$= (x - 2)(2x + 1)$$

$$b) 2x^2 - 8x + 8 = 2(x^2 - 4x + 4) = 2(x - 2)(x - 2) = 2(x - 2)^2$$

$$2x) \begin{bmatrix} 2x^2 - 8x + 8 = 0 & 1, 2 \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \\ (x - 2)^2 = 0 \end{bmatrix}$$

c) $2x^2 + 6x + 5$ NELZE v $\mathbb{R}$ rozložit na součin kořenů. *čirulka* (neexistují x_1, x_2)

20
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{2 \cdot 2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-4}}{4}, D = -4 < 0 \text{ nemá reálné kořeny.}$$

④ Učitel všechny kradl. korve, jejich kořeny jsou čísla:

a) $2, 7$: $a(x-x_1)(x-x_2) = 0$
 $a(x-2)(x-7) = 0$
 $a(x^2 - 9x + 14) = 0 \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ [mapa: $a=1: x^2 - 9x + 14 = 0$
 $a=2: 2x^2 - 18x + 28 = 0$
 $a=-3: -3x^2 + 27x - 42 = 0$]

20 b) $-3, 8$: $a(x-x_1)(x-x_2) = 0$
 $a(x-(-3))(x-8) = 0$
 $a(x+3)(x-8) = 0$
 $a(x^2 - 8x + 3x - 24) = 0$
 $a(x^2 - 5x - 24) = 0 \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

c) $\sqrt{2}, 3\sqrt{2}$: $a(x-\sqrt{2})(x-3\sqrt{2}) = 0$
 $a(x^2 - 3\sqrt{2}x - \sqrt{2}x + 3\sqrt{2}\sqrt{2}) = 0$
 $a(x^2 - 4\sqrt{2}x + 3 \cdot 2) = 0$
 $a(x^2 - 4\sqrt{2}x + 6) = 0 \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

d) $4, \frac{1}{4}$: $a(x-4)(x-\frac{1}{4}) = 0$
 $a(x^2 - \frac{1}{4}x - 4x + 4 \cdot \frac{1}{4}) = 0$
 $a(x^2 - \frac{17}{4}x + 1) = 0 \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 $a(4x^2 - 17x + 4) = 0 \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

[mapa: $a=1: 4x^2 - 17x + 4 = 0$
 $a=\frac{1}{4}: 2x^2 - \frac{17}{2}x + 1 = 0$]

! POZOR NA ÚPRAVY!
 $-3\sqrt{2}x - \sqrt{2}x = -3(\sqrt{2}x) - 1(\sqrt{2}x) = -4\sqrt{2}x$
 $\text{nebo } \sqrt{2}x(-3-1) = -4\sqrt{2}x$
 $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 = 2 \text{ nebo } \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 2} = \sqrt{4} = 2$
 $-\frac{1}{4}x - 4x = -x(\frac{1}{4} + 4) = -x(\frac{1+16}{4}) = -\frac{17}{4}x$
 $\text{nebo } -\frac{1}{4}x - 4x = -\frac{1x}{4} - 4x = -\frac{1x + 16x}{4} = -\frac{17x}{4} = -\frac{17}{4}x$

⑤ Učitel definiční obory, zjednodušil

a) $\frac{4x^2 + 4x - 2}{x^2 - x - 6} = \frac{4(x-\frac{1}{4})(x-(-2))}{(x-3)(x+2)} = \frac{(4x-1)(x+2)}{(x-3)(x+2)} = \frac{4x-1}{x-3} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0, -2\}$
 $\left[\begin{array}{l} x-3 \neq 0 \quad x+2 \neq 0 \\ x \neq 3 \quad x \neq -2 \end{array} \right]$

$4x^2 + 7x - 2 = 0$ rozložit na součin
 $(a=4, b=7, c=-2)$
 $x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 4 \cdot 4 \cdot 2}}{8} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 32}}{8} = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{8} = \frac{-7 \pm 9}{8} = \frac{-7+9}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$
 $\frac{-7-9}{8} = \frac{-16}{8} = -2$

b) $\frac{x^2 - 3x + 2}{4(x-1)(x^2 - 5x + 6)} = \frac{(x-2)(x-1)}{4(x-1)(x+1)(x-3)(x-2)} = \frac{1}{4(x+1)(x-3)}$
 $\left[\begin{array}{l} x-1 \neq 0 \quad x+1 \neq 0 \quad x-3 \neq 0 \quad x-2 \neq 0 \\ x \neq 1 \quad x \neq -1 \quad x \neq 3 \quad x \neq 2 \end{array} \right] \quad D = \mathbb{R} \setminus \{1, -1, 3, 2\}$

! Číslo x (jmenovatel u směřované rozložit na součin lineárních dvočlennů (kořenových čísel)) $\Rightarrow$ podmínky, redukce!

- VYUŽITÍ VLASTNOSTÍ A VZTAHŮ MEZI KÖŘENY A KÖEFICIENTY KVADR. RCE

⑥ Uvědiš k tak, aby daná rovnice měla 1 kořen rovný nule, uveď i druhý kořen

a) $kx^2 - 5(k+1)x + k-1 = 0$
 $(a=k, b=-5(k+1), c=k-1)$

1 kořen rovný 0 $\Leftrightarrow$ kv. rel bez abs. členu, tj. $c=0$

$$\begin{aligned} c=0 \\ k-1=0 \\ \underline{k=1} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{rel má tvar (dosad. } k=1) \\ 2x^2 - 5 \cdot 2x + 1-1=0 \\ 2x^2 - 10x = 0 \quad | :2 \\ x^2 - 5x = 0 \\ x(x-5)=0 \\ \begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=5 \end{array} \end{array} \right\}$$

b) $(k-1)x^2 - (k-2)x + k(k-3) = 0$
 $(a=k-1, b=-(k-2), c=k(k-3))$
 1 kořen = 0 $\Rightarrow$ kvadr. rel bez abs. členu ($c=0$)

$$\begin{aligned} k(k-3) &= 0 \\ \begin{array}{l} k_1=0 \\ k_2=3 \end{array} & \quad \left. \begin{array}{l} \text{rel má tvar (dos. na } k_i) \\ (0-1)x^2 - (0-2)x + 0(0-3)=0 \\ -x^2 + 2x = 0 \\ x^2 - 2x = 0 \\ x(x-2)=0 \\ \begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=2 \end{array} \end{array} \right\} \\ & \quad \left. \begin{array}{l} (3-1)x^2 - (3-2)x + 3(3-3)=0 \\ 2x^2 - x = 0 \\ x(2x-1)=0 \\ \begin{array}{l} x_1=0 \\ 2x-1=0 \\ x_2=\frac{1}{2} \end{array} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

závěr:

- pro $k=0$: $x_2=2$
 - pro $k=3$: $x_2=\frac{1}{2}$

⑦ Aniž danou rovnici řešíš, uveď hodnotu parametru a druhý kořen,
 x) je-li $x_1=2$ a $x^2 - px + 10 = 0$.

1. zp. - dosadíme

$$\begin{aligned} x_1=2 & \Rightarrow x^2 - px + 10 = 0 \\ 2^2 - 2p + 10 &= 0 \\ 4 - 2p + 10 &= 0 \\ 14 &= 2p \\ \underline{p=7} \end{aligned}$$

2. zp. VÍSTOVÝ VZORCE

$$\begin{aligned} x^2 - px + q &= 0 \\ x^2 - px + 10 &= 0 \\ (p=-p, q=10) & \\ \left[\begin{array}{l} x_1+x_2=-p \\ x_1x_2=q \end{array} \right] & \quad \begin{array}{l} x_1+x_2=-p \\ x_1x_2=q \end{array} \\ \left[\begin{array}{l} 2+x_2=7 \\ 2x_2=10 \end{array} \right] & \Rightarrow x_2=5 \end{aligned}$$

(x_2): $x^2 - 7x + 10 = 0$ (nemáme řešení)

$$\begin{aligned} x_1+x_2 &= 7 \\ x_1x_2 &= 10 \\ \underline{2+x_2=7} & \Rightarrow x_2=5 \\ \underline{2x_2=10} & \Rightarrow x_2=5 \end{aligned}$$

nejhodnotíš

- ③ Anikž danou rovnici řešíš, sestav rovnici, která má kořeny
a) dvojčíslovní mň rovnici $x^2 - 3x + 2 = 0$. *MYSL. VIĚTOVY VZORCE*

přirodní: $x^2 - 3x + 2 = 0$ nová (hledaná): $x^2 + p'x + q' = 0$; $x_1' = 3x_1$; $x_2' = 3x_2$

$$x_1 + x_2 = 3$$

$$x_1 x_2 = 2$$

$$x_1' + x_2' = 3x_1 + 3x_2 = 3(x_1 + x_2) = 3 \cdot 3 = 9 = -p' \Rightarrow p' = -9$$

$$x_1' x_2' = 3x_1 \cdot 3x_2 = 9x_1 x_2 = 9 \cdot 2 = 18 = q'$$

hledaná rovnice: $x^2 - 9x + 18 = 0$ pokud chceme všechny rovnice
 $\Rightarrow a(x^2 - 9x + 18) = 0$ $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
tj. uvaž. i násobky

PERFECTNÍ ZÁPIS $\Rightarrow$ SPRÁVNĚ!

- b) převážení mň rovnice $x^2 - 3x + 2 = 0$

přir. $x^2 - 3x + 2 = 0$ nová: $x^2 + p'x + q' = 0$ $x_1' = \frac{1}{x_1}$ $x_2' = \frac{1}{x_2}$

$$x_1 + x_2 = 3$$

$$x_1 x_2 = 2$$

$$x_1' + x_2' = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{3}{2} = -p' \Rightarrow p' = -\frac{3}{2}$$

$$x_1' x_2' = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1}{2} = q'$$

nová (hledaná) rovnice:

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0$$

$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$

1. z. pokud chceme všechny rovnice
 $\Rightarrow a(2x^2 - 3x + 1) = 0$ $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
uvaž. i násobky

- c) o 2 měří mň rovnice $x^2 - 3x + 2 = 0$

přir. $x^2 - 3x + 2 = 0$ nová: $x^2 + p'x + q' = 0$ $x_1' = x_1 + 2$ $x_2' = x_2 + 2$

$$x_1 + x_2 = 3$$

$$x_1 x_2 = 2$$

$$x_1' + x_2' = (x_1 + 2) + (x_2 + 2) = x_1 + x_2 + 4 = 3 + 4 = 7 = -p' \Rightarrow p' = -7$$

$$x_1' x_2' = (x_1 + 2)(x_2 + 2) = x_1 x_2 + 2x_1 + 2x_2 + 4 = 2 + 2 \cdot 3 + 4 = 12 = q'$$

nová: $x^2 - 7x + 12 = 0$

- d) opačné mň rovnice $x^2 - 4x - 12 = 0$

přir. $x^2 - 4x - 12 = 0$ nová: $x^2 + p'x + q' = 0$ $x_1' = -x_1$ $x_2' = -x_2$

$$x_1 + x_2 = 4$$

$$x_1 x_2 = -12$$

$$x_1' + x_2' = -x_1 - x_2 = -(x_1 + x_2) = -4 = -p' \Rightarrow p' = 4$$

$$x_1' x_2' = (-x_1)(-x_2) = x_1 x_2 = -12 = q'$$

nová: $x^2 + 4x - 12 = 0$

- e) takové, kř jejich součet je -1 a jejich převážení hodnoty mají součet 2

přir. rovnice: $x^2 + px + q = 0$

$$x_1 + x_2 = -1 = -p \Rightarrow p = 1$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{-1}{x_1 x_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 x_2 = -2$$

$$\frac{-1}{x_1 x_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x_1 x_2}{q} = -2$$

na má tvar:

$$x^2 + x - 2 = 0$$

pokud máme hledat všechny
 $\Rightarrow a(x^2 + x - 2) = 0$ $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$